

Kohärente Zustände und parametrische Resonanzeffekte

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Physik

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jürgen Kutzner

aus Berlin

1971

Kohärente Zustände und parametrische Resonanzeffekte

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Physik

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jürgen Kutzner

aus Berlin



1. Referent: Prof. Dr. S. Wilking

2. Referent: Prof. Dr. K. Bennemann

Tag der mündlichen Prüfung: 30. August 1971

Inhalt

1	Einleitung	Seite	1
2	Theoretischer Teil		2
3	Experimenteller Teil		11
4	Zusammenfassung		15
5	Literatur		16
6	Anhang		17
	Anhang A1		17
	Anhang A2		18



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548824_0055

1 Einleitung

Seit Glauber 1963 kohärente Zustände elektromagnetischer Felder¹ ausführlich diskutierte, sind mehrere Arbeiten erschienen, die sich mit der Anwendung und physikalischen Interpretation dieser Zustände befassen². Das Konzept der kohärenten Zustände wurde inzwischen auch auf andere Systeme, beispielsweise ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld^{3,4}, ausgedehnt. Hier sollen nun phasenabhängige Resonanzeffekte, die parametrischen Resonanzeffekte, untersucht werden. Dabei wird ein resonanzfähiges System, bestehend aus einem Teilchensystem und einem Bosonenfeld-Mode (a-Mode, Frequenz ω) mit einer nichtdiagonalen (bzgl. des Teilchensystems) Wechselwirkung, durch einen zweiten Bosonenfeld-Mode (b-Mode, Frequenz Ω), dessen Wechselwirkung mit dem Teilchensystem diagonal (bzgl. des Teilchensystems) ist, erweitert. Sind die Anfangszustände der beiden Moden kohärente Zustände und ist $\Omega = 2\omega/k$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$, so enthält die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchensystem einen Übergang von $|s\rangle$ nach $|s'\rangle$ macht einen Term, der von den Phasen φ_α und φ_β der die kohärenten Anfangszustände charakterisierenden komplexen Zahlen abhängt. Für mittlere Besetzungszahlen $n_\alpha, N_\beta \gg 1$ zeigt sich an dem Beispiel parametrischer Resonanzeffekte mit Photonen und einem Spin 1/2-System, daß die theoretischen Ergebnisse mit denen einer Theorie, bei der die elektromagnetischen Felder klassisch behandelt werden, übereinstimmen, wenn φ_α und φ_β mit den Phasenkonstanten der klassischen Felder identifiziert werden.

Eine Anwendungsmöglichkeit der parametrischen Resonanzeffekte liegt darin, daß eine Emission des a-Modus erfolgen kann, ohne wie i. a. bei Masern und Lasern eine negative Besetzungsdifferenz des Teilchensystems vorauszusetzen.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die theoretischen Ergebnisse durch Kernresonanzuntersuchungen in schwachen Magnetfeldern mit der "Dreifelder methode"⁵ experimentell bestätigt.

2 Theoretischer Teil

Betrachtet werden soll also ein Teilchensystem, das mit zwei Bosonenfeld-Moden wechselwirkt, wobei die Wechselwirkung mit dem einen Mode hinsichtlich des Teilchensystems diagonal, die Wechselwirkung mit dem anderen nichtdiagonal ist. Der Hamilton-Operator dieses Systems sei

$$(1) \quad H = H_0 + H_1$$

mit

$$(2) \quad H_0 = \sum_{\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}}^{\dagger} c_{\mathbf{r}} + \hbar \omega a^{\dagger} a + \hbar \Omega b^{\dagger} b + \sum_{\mathbf{r}} I_{\mathbf{r}\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}}^{\dagger} c_{\mathbf{r}} b + \sum_{\mathbf{r}} I_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^* c_{\mathbf{r}}^{\dagger} c_{\mathbf{r}} b^{\dagger}$$

$$(3) \quad H_1 = \sum_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} K_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} c_{\mathbf{r}}^{\dagger} c_{\mathbf{r}'} a + \sum_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} K_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^* c_{\mathbf{r}}^{\dagger} c_{\mathbf{r}'} a^{\dagger}, \quad K_{\mathbf{r}\mathbf{r}} = 0.$$

Hierbei sind die $a^{\dagger}, a$ und $b^{\dagger}, b$ voneinander unabhängige Bosonenerzeugungs- bzw. Bosonenvernichtungsoperatoren und $c_{\mathbf{r}}^{\dagger}, c_{\mathbf{r}}$ Teilchenerzeugungs- bzw. Teilchenvernichtungsoperatoren. Eine vollständige, orthonormierte Basis bilden die Zustände

$$(4) \quad |s n N\rangle = |\dots m_{\mathbf{r}}^s \dots n N\rangle,$$

wobei $m_{\mathbf{r}}^s$ die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes $|\mathbf{r}\rangle$ im Zustand $|s\rangle$ des Teilchensystems, n und N die Besetzungszahlen des a - und des b -Modes sind. Diese Basiszustände sind jedoch keine Eigenzustände zu H_0 . Es kann gezeigt werden (siehe Anhang A1), daß die Zustände $|n_{\mathbf{s}}^{\dagger} s N\rangle$ definiert durch

$$(5) \quad |n_{\mathbf{s}}^{\dagger} s N\rangle = D(z_{\mathbf{s}}) |s n N\rangle$$

mit

$$D(z_{\mathbf{s}}) = e^{z_{\mathbf{s}} b^{\dagger} - z_{\mathbf{s}}^* b}, \quad z_{\mathbf{s}} = -\sum_{\mathbf{r}} I_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^* m_{\mathbf{r}}^s / \hbar \Omega$$

ebenfalls eine vollständige, orthonormierte Basis bilden und außerdem Eigenzustände zu H_0 sind,

$$(6) \quad H_0 |n_{\mathbf{s}}^{\dagger} s N\rangle = E_{n s N} |n_{\mathbf{s}}^{\dagger} s N\rangle$$

mit

$$E_{nsN} = \sum_{\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{r}} m_{\mathbf{r}}^s + n\hbar\omega + N\hbar\Omega - \left| \sum_{\mathbf{r}} I_{\mathbf{r}} m_{\mathbf{r}}^s \right|^2 / \hbar\Omega$$

Der dabei auftretende Operator $D(z_s)$ hat die Struktur des "Verschiebungsoperators", der zur Darstellung kohärenter Zustände elektromagnetischer Felder herangezogen wurde¹. Mit dem Operator H_1 wird nun Diracsche Störungsrechnung in erster Ordnung gemacht. Der Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$ sei $|0\rangle$, während der Zustand zur Zeit t mit $|t\rangle$ bezeichnet wird. Im Wechselwirkungsbild hat die Bewegungsgleichung die Form

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |t_w\rangle &= H_w(t) |t_w\rangle \\ (7) \quad H_w(t) &= e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} \\ |t_w\rangle &= e^{iH_0 t/\hbar} |t\rangle \end{aligned}$$

In erster Näherung ergibt sich daraus

$$(8) \quad |t_w\rangle = |0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H_w(t') dt' |0\rangle$$

und weiter

$$\begin{aligned} (9) \quad |t_w\rangle &= |0\rangle - \sum_{\substack{n s N \\ n' s' N'}} \frac{e^{i(E_{nsN} - E_{n's'N'})t/\hbar} - 1}{E_{nsN} - E_{n's'N'}} \cdot \\ &\quad \cdot \langle n\phi_{sN} | H_1 | n'\phi_{s'N'} \rangle \langle n'\phi_{s'N'} | 0 \rangle | n\phi_{sN} \rangle \end{aligned}$$

Der Anfangszustand $|0\rangle$ sei

$$(10) \quad |0\rangle = |s\alpha\beta\rangle,$$

wobei s wieder den Zustand des Teilchensystems charakterisiert und α bzw. β den des a - bzw. des b -Modes. Es wird jedoch nicht wie i.a. üblich gefordert, daß $|s\alpha\beta\rangle$ ein Eigenzustand zu H_0 und damit insbesondere $|\alpha\rangle$ ein inkohärenter Zustand ist. Für die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit t im Zustand $|n'\phi_{s'N'}\rangle$ vorzufinden, erhält man für $s \neq s'$ wegen (10) aus (9)

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & |\langle n' \tilde{\Phi}_{s, N'} | t \rangle|^2 = |\langle n' \tilde{\Phi}_{s, N'} | t_w \rangle|^2 = \\
 & = \left| \sum_{n'', N''} \frac{e^{i(E_{n', s', N'} - E_{n'', s N'',}) t / \hbar} - 1}{E_{n', s', N'} - E_{n'', s N'',}} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \langle n' \tilde{\Phi}_{s, N'} | H_1 | n'' \tilde{\Phi}_{s N'',} \rangle \langle n'' \tilde{\Phi}_{s N'',} | s \alpha \beta \rangle \right|^2
 \end{aligned}$$

Wäre $|s \alpha \beta\rangle$ ein Eigenzustand zu H_0 , so würde sich die Summe in (11) auf einen Summanden reduzieren, und es könnten keine "Interferenzterme" auftreten.

Da es zur Beschreibung vieler Resonanzeffekte (z.B. unter bestimmten Voraussetzungen Spin- und Zyklotronresonanz) ausreichend ist, sich auf ein Teilchen zu beschränken, soll dieses im weiteren getan werden, d.h.

$$|s\rangle = |0 \dots 1_s \dots 0\rangle,$$

der einzige besetzte Einteilchenzustand wurde mit s bezeichnet, und damit

$$E_{nsN} = \epsilon_s + n\hbar\omega + N\hbar\Omega - |I_{ss}|^2 / \hbar\Omega,$$

$$(12) \quad z_s = - I_{ss}^* / \hbar\Omega$$

Wegen

$$\langle \tilde{\Phi}_{s, N'} | c_{r'}^\dagger c_r | \tilde{\Phi}_{s N'',} \rangle = \delta_{rs} \delta_{r's} \langle N' | D^\dagger(z_s) D(z_s) | N'' \rangle$$

erhält man für die Matrixelemente des Störoperators H_1

$$\langle n' \tilde{\Phi}_{s, N'} | H_1 | n'' \tilde{\Phi}_{s N'',} \rangle = \langle N' | D^\dagger(z_s) D(z_s) | N'' \rangle$$

$$\{K_{s's} \delta_{n'', n'+1} \langle n' | a | n'+1 \rangle + K_{ss}^* \delta_{n'', n'-1} \langle n' | a^\dagger | n'-1 \rangle\}$$

Aus (11) ergibt sich dann für die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit t im Zustand $|n' \tilde{\Phi}_{s, N'}\rangle$ vorzufinden,

$$(13) \quad |\langle n' \frac{1}{2}_{s,N'} | t \rangle|^2 = \left| \sum_{N''} \langle N' | D^+(z_{s'}) D(z_s) | N'' \rangle \langle N'' | D^+(z_s) | \Omega \rangle \times \right. \\ \left. \left\{ \frac{e^{i(E_{n's'N'} - E_{n'+1sN''})t/\hbar} - 1}{E_{n's'N'} - E_{n'+1sN''}} K_{s's} \langle n' | a | n'+1 \rangle \langle n'+1 | a \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{e^{i(E_{n's'N'} - E_{n'-1sN''})t/\hbar} - 1}{E_{n's'N'} - E_{n'-1sN''}} K_{ss'}^* \langle n' | a^\dagger | n'-1 \rangle \langle n'-1 | a \rangle \right\} \right|^2$$

Die Nenner in (13) sind

$$(14) \quad E_{n's'N'} - E_{n' \pm 1sN''} = \Delta_{s's} \mp \hbar\omega + (N' - N'')\hbar\Omega$$

mit $\Delta_{s's} = \epsilon_{s'} - \epsilon_s + (|I_{ss}|^2 - |I_{s's}|^2)/\hbar\Omega$

Für

$$\Omega \neq 2\omega/k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ist höchstens ein Term der Summe in (13) resonant. Die jeweilige Resonanzbedingung wird wegen (14) durch

$$(15) \quad \Delta_{s's} \mp \hbar\omega + l\hbar\Omega = 0, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

gegeben. Unter Vernachlässigung der nichtresonanten Terme in (13) erhält man den bekannten Ausdruck für $|\langle n' \frac{1}{2}_{s,N'} | t \rangle|^2$, wobei die Prozesse mit $l = 0$ als Einquanten-, die mit $l \neq 0$ als Mehrquantenprozesse bezeichnet werden können.

Gilt jedoch

$$(16) \quad \Omega = 2\omega/k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

so können gleichzeitig zwei Terme in (13) resonant sein. Ist

$$(17) \quad \hbar\omega = |\Delta_{s's}|$$

dann wird die Bedingung

$$\Delta_{s's} \mp \hbar\omega + (N' - N'')\hbar\Omega = 0$$

sowohl für $N'' = N'$ als auch für $N'' = N' + k$ ($\Delta_{s,s} > 0$) oder $N'' = N' - k$ ($\Delta_{s,s} < 0$) erfüllt. Unter Vernachlässigung der nicht-resonanten Terme erhält man dann aus (13) für $\Delta_{s,s} > 0$

$$(18) \quad |\langle n' \Phi_{s,N'} | t \rangle|^2 = g(t, \Delta_{s,s} - \hbar\omega) \cdot \left\{ |K_{s,s}|^2 \langle n'+1 | \langle n'+1 | \alpha \rangle|^2 |\langle N' | D^+(z_s) D(z_s) | N' \rangle \langle N' | D^+(z_s) | \beta \rangle|^2 + |K_{s,s}|^2 \langle n' | \langle n'-1 | \alpha \rangle|^2 |\langle N' | D^+(z_s) D(z_s) | N'+k \rangle \langle N'+k | D^+(z_s) | \beta \rangle|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(K_{s,s} K_{s,s}^* \sqrt{n'(n'+1)} \langle n'+1 | \alpha \rangle \langle n'-1 | \alpha \rangle^* \langle N' | D^+(z_s) | \beta \rangle \langle N'+k | D^+(z_s) | \beta \rangle^* \langle N' | D^+(z_s) D(z_s) | N' \rangle \langle N' | D^+(z_s) D(z_s) | N'+k \rangle^* \right) \right\}$$

mit

$$g(t, x) = \left| \frac{e^{ixt/\hbar} - 1}{x} \right|^2$$

Wie schon vorher erwähnt ersieht man auch aus (18), daß bei einem inkohärenten Anfangszustand $|\alpha\rangle$ höchstens einer der ersten beiden Terme von Null verschieden sein kann und der dritte ("Interferenzterm") verschwindet. Bei kohärenten Zuständen, die im weiteren für $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ vorausgesetzt werden, können jedoch alle drei Terme in (18) ungleich Null sein. Dabei ist der erste mit einer Absorption eines Quants des a-Modus, der zweite mit einer Emission verbunden.

Für die Wahrscheinlichkeit $w_{ss'}(t)$, daß das Teilchen einen Übergang von $|s\rangle$ nach $|s'\rangle$ unabhängig vom Endzustand der beiden Moden macht, gilt (siehe z.B. 6)

$$(19) \quad w_{ss'}(t) = \sum_{n', N'} |\langle n' \Phi_{s,N'} | t \rangle|^2$$

Wegen der Eigenschaften der kohärenten Zustände erhält man¹

$$(20) \quad \sum_n \langle n'+1 | \langle n'+1 | \alpha \rangle|^2 = n_\alpha, \quad \sum_n n' |\langle n'-1 | \alpha \rangle|^2 = n_\alpha + 1 \approx n_\alpha \quad \text{für } n_\alpha \gg 1$$

und weiter

$$\sum_n \sqrt{n'(n'+1)} \langle n'+1 | \alpha \rangle \langle n'-1 | \alpha \rangle^* = n_\alpha e^{2i\varphi_\alpha}$$

mit $n_\alpha = |\alpha|^2$ als mittlerer Besetzungszahl von $|\alpha\rangle$ und φ_α als Phase der komplexen Zahl α .

Zum anderen gilt^{1,7}

$$D^+(z_s) = D(-z_s) \quad ,$$

$$(21) \quad D(-z_s) D(z_s) = D(z_s - z_s) e^{-i \text{Im}(z_s, z_s^*)} \quad ,$$

$$|\beta\rangle = D(\beta) |0_\beta\rangle \quad , \quad |0_\beta\rangle \text{ Vakuumzustand des b-Modes,}$$

$$\langle N' | D(z) | N'' \rangle = \sqrt{\frac{N''!}{N'!}} z^{N' - N''} e^{-|z|^2/2} L_{N''}^{(N' - N'')}(|z|^2) \quad ,$$

wobei $L_{N''}^{(N' - N'')}(|z|^2)$ die verallgemeinerten Laguerre Polynome sind.

Zur Vereinfachung wird nun die prinzipiell nicht erforderliche Einschränkung

$$(22) \quad |K_{s,s}|^2 = |K_{ss}|^2$$

gemacht. Für $n_\alpha \gg 1$ folgt dann mit (20) und (21) aus (18) und (19)

$$(23) \quad W_{ss}(t) = g(t, \Delta_{s,s} - \hbar\omega) n_\alpha |K_{s,s}|^2 e^{-|z_s - z_s|^2} e^{-|\beta - z_s|^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_N [L_N^{(0)}(|z_s - z_s|^2)]^2 \frac{|\beta - z_s|^{2N}}{N!} + \right.$$

$$+ |\beta - z_s|^{2k} |z_s - z_s|^{2k} \sum_N \frac{N!}{(N'+k)!} [L_N^{(k)}(|z_s - z_s|^2)]^2 \frac{|\beta - z_s|^{2N}}{(N'+k)!}$$

$$+ 2 \text{Re} \left(\frac{K_{s,s} K_{ss}}{|K_{s,s}|^2} e^{2i\varphi_\alpha} (z_s - z_s)^k (\beta - z_s)^{*k} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_N L_N^{(0)}(|z_s - z_s|^2) L_N^{(k)}(|z_s - z_s|^2) \frac{|\beta - z_s|^{2N}}{(N'+k)!} \right\}$$

Gilt außerdem $N_\beta = |\beta|^2 \gg 1$ und $|\beta| \gg |z_s|$, so ergibt sich schließlich aus (23) als Näherungslösung für die Übergangswahrscheinlichkeit des Teilchens

$$(24) \quad W_{ss'}(t) = g(t, \Delta_{s,s} - \hbar\omega) n_\alpha |K_{s,s}|^2 \left\{ J_0^2(x) + J_k^2(x) + \right. \\ \left. + 2(-1)^k J_0(x) J_k(x) \operatorname{Re} \left(e^{i(2\varphi_\alpha - k\varphi_\beta)} \frac{K_{s,s} K_{ss'}}{|K_{s,s}|^2} \left[\frac{z_s - z_{s'}}{(z_s - z_{s'})^*} \right]^{k/2} \right) \right\}$$

mit φ_β als Phase der komplexen Zahl β , $J_n(x)$ als Besselfunktion n -ter Ordnung und

$$(25) \quad x = 2|\beta| |z_s - z_{s'}|.$$

Durch geeignete Wahl von φ_α oder φ_β und $N_\beta = |\beta|^2$ kann erreicht werden, daß der dritte Term in (24) Null ist, und daß für den ersten und zweiten Term entweder

$$J_0^2(x) > J_k^2(x) \quad \text{oder} \quad J_0^2(x) < J_k^2(x)$$

gilt. Im ersten Fall erfolgt insgesamt eine Absorption des a -Modes, im zweiten bei gleicher (positiver) Besetzungsdifferenz des Teilchensystems eine Emission des a -Modes (siehe (18) und folgende Bemerkung). Damit ergibt sich eine Möglichkeit, Systeme, die durch den Hamiltonoperator (1) beschrieben werden, als Verstärker auszunutzen, ohne eine negative Besetzungsdifferenz zu erzeugen. Ein solches parametrisches Verstärkerverfahren könnte insbesondere für Zyklotronresonanz an Halbleitern, wo bei äquidistanten Energieniveaus durch Mikrowelleneinstrahlung prinzipiell keine negative Gesamt-Besetzungsdifferenz erreichbar ist, interessant sein.^{8,9}

Die Bedeutung der Abhängigkeit des dritten Terms in (24) von φ_α und φ_β soll an dem Beispiel parametrischer Resonanzeffekte mit Photonen und einem Spinsystem, die in den im zweiten Teil dieser Arbeit beschriebenen Experimenten untersucht wurden, diskutiert werden. Für ein Spin $1/2$ -System mit $\gamma > 0$ (z.B. Wasserprotonen) gilt

$$|s\rangle = |+\rangle, \quad |s'\rangle = |-\rangle$$

und

$$\epsilon_{\pm} = \mp \mu B_0 = \mp \frac{1}{2} \hbar \gamma B_0.$$

Hierbei sind B_0 das homogene, statische Magnetfeld, μ das magnetische Kernmoment und γ das gyromagnetische Verhältnis. Da der a- und der b-Mode Photonmoden sind, ist in Dipolnäherung

$$I_{ss} = -I_{s's'} = -i\mu \sqrt{\frac{2\pi\hbar\Omega}{V}}, \quad V \text{ Normierungsvolumen}$$

und

$$K_{ss'} = K_{s's} = -i\mu \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}},$$

so daß (22) erfüllt ist. Damit ergibt sich

$$(26) \quad \Delta_{s's} = \hbar \gamma B_0,$$

$$z_s = -z_{s'},$$

und weiter für die Argumente der Besselfunktionen (25)

$$x = \frac{2\mu}{\hbar\Omega} \sqrt{8\pi\rho_\beta} = \frac{\gamma}{\Omega} \sqrt{8\pi\rho_\beta},$$

wobei $\rho_\beta = \frac{N_\beta \hbar \Omega}{V}$ die mittlere Energiedichte des b-Mode-Anfangszustandes ist. Wegen $\rho_\beta = B_\beta^2 / 8\pi$ mit B_β als Amplitude der magnetischen Feldstärke folgt

$$(27) \quad x = \frac{\gamma}{\Omega} \sqrt{8\pi\rho_\beta} = \frac{\gamma B_\beta}{\Omega}$$

Analog erhält man

$$(28) \quad n_\alpha |K_{s's}|^2 = \pi \hbar^2 \gamma^2 \rho_\alpha / 2 = (\hbar \gamma B_\alpha / 4)^2$$

Hierbei sind $\rho_\alpha = n_\alpha \hbar \omega / V$ die mittlere Energiedichte und B_α die Amplitude der magnetischen Feldstärke des a-Mode-Anfangszustandes. Damit ergibt sich aus (24)

$$(29) \quad w_{ss'}(t) = g(t, \hbar \gamma B_0 - \hbar \omega) (\hbar \gamma B_\alpha / 4)^2 \left\{ J_0^2(x) + J_k^2(x) - 2J_0(x)J_k(x) \cos(2\varphi_\alpha - k\varphi_\beta + 3k\pi/2) \right\}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem einer Theorie, bei der die Felder klassisch behandelt werden (siehe Anhang A2), überein, wenn die Phasen φ_α und φ_β der die kohärenten Anfangszustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ charakterisierenden komplexen Zahlen mit den Phasenkonstanten der klassischen Felder identifiziert werden.

Die Photoneinstrahlung im schwachen Zwischenfeld $\vec{B}_0$ ($B_0 = 1,5G$) erfolgte mittels einer Spule, die senkrecht zu $\vec{B}_0$ orientiert war (a-Mode) und einer Helmholtz-Spule, die ein magnetisches Wechselfeld (b-Mode) parallel zu $\vec{B}_0$ erzeugte. Durch Fremdsteuerung des einen Generators (1) durch den anderen (2) wurde erreicht, daß die beiden Moden eine feste Phasendifferenz, die durch einen Phasenschieber variiert werden konnte, hatten. Die Messung der durch die Photoneinstrahlung im Zwischenfeld hervorgerufenen Übergangswahrscheinlichkeit $W_{ss}(t)$ in Abhängigkeit von φ_α und x wurde so vorgenommen, daß durch Variation von n_α die Übergangswahrscheinlichkeiten immer gleich $W_{ss}^0(t)$, Übergangswahrscheinlichkeit für $x = 0$, gemacht wurden. Wegen

$$(30) \quad W_{ss}^0(t) = g(t, \hbar \gamma B_0 - \hbar \omega) n_\alpha^0 |K_{s,s}|^2 = g(t, \hbar \gamma B_0 - \hbar \omega) (\hbar \gamma B_\alpha^0 / 4)^2$$

folgt mit (29)

$$(31) \quad (n_\alpha / n_\alpha^0)^{-1} = J_0^2(x) + J_k^2(x) - 2J_0(x)J_k(x)\cos(2\varphi_\alpha - k\varphi_\beta + 3k\pi/2)$$

Die durchgezogenen Kurven in den Abb. 2, 3, 4 und 5 geben den aus (31) folgenden Funktionsverlauf für n_α / n_α^0 bzw. $(n_\alpha / n_\alpha^0)^{-1}$ in Abhängigkeit von x bzw. von $\Delta\varphi = \varphi_\alpha - \varphi_\beta$ für $k = 1$ und $k = 3$ wider.

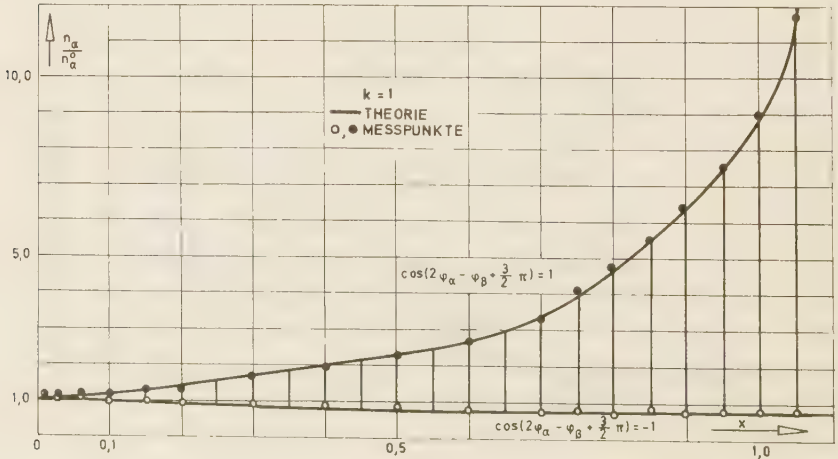


Abb. 2 n_α / n_α^0 als Funktion von x für $k = 1$

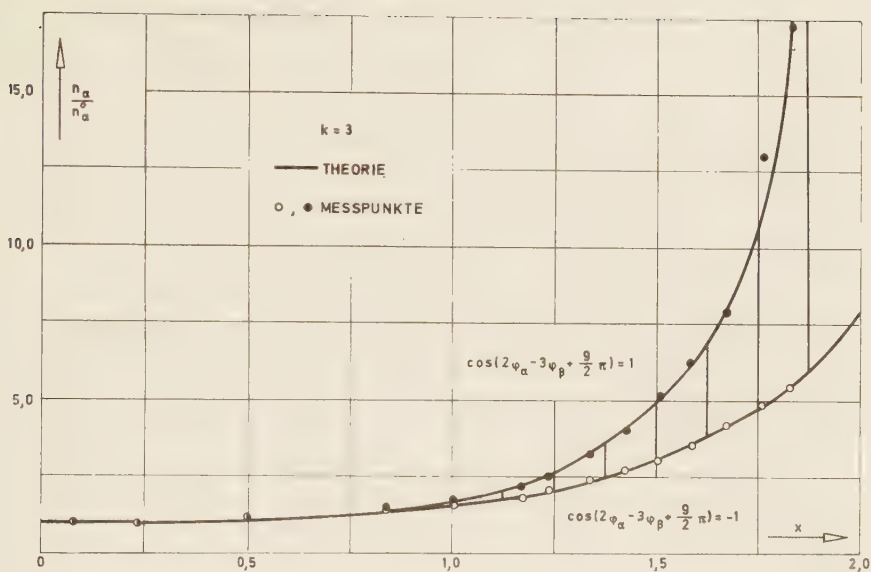


Abb. 3 n_a/n_a^0 als Funktion von x für $k=3$

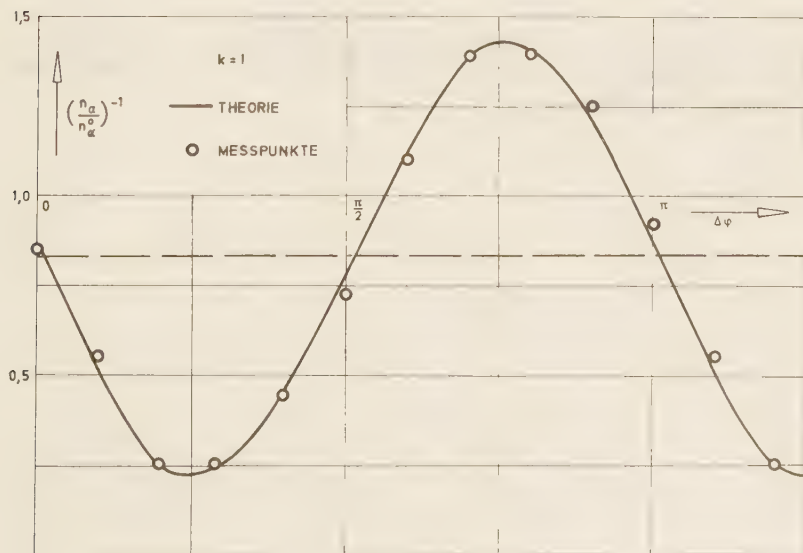


Abb. 4 $(n_a/n_a^0)^{-1}$ als Funktion von $\Delta\varphi$ für $k=1$

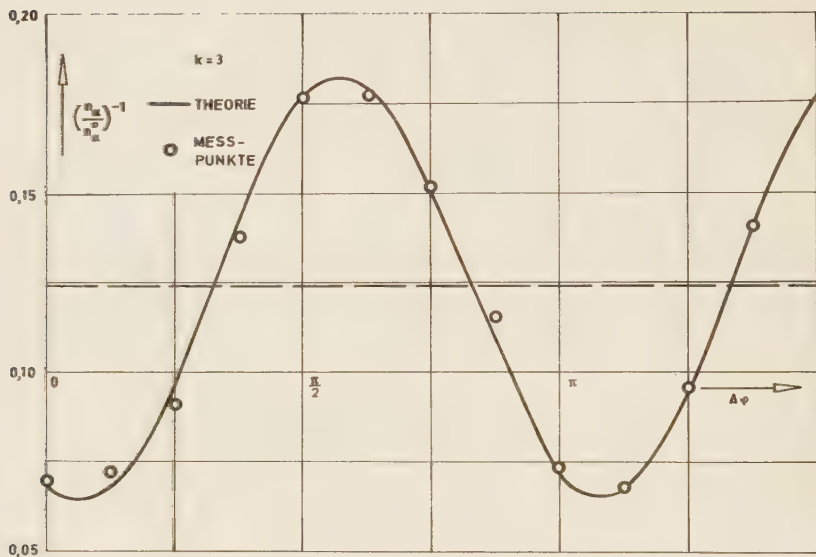


Abb. 5 $\left(\frac{n_\alpha}{n_\alpha^0}\right)^{-1}$ als Funktion von $\Delta\varphi$ für $k = 3$

Durch die gute Übereinstimmung der Meßpunkte mit den theoretischen Kurven werden die im ersten Teil der Arbeit erhaltenen Ergebnisse bestätigt.

4 Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß Systeme, die sich durch den Hamiltonoperator (1) beschreiben lassen, bei Voraussetzung kohärenter Anfangszustände für die beiden Moden und $\Omega = 2\omega/k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, besondere Effekte, die parametrischen Resonanzeffekte, zeigen. Die Bedeutung der Abhängigkeit des dabei auftretenden "Interferenzterms" von den Phasen φ_α und φ_β der die kohärenten Zustände charakterisierenden komplexen Zahlen wurde durch Vergleich mit den Ergebnissen einer Theorie, bei der die Felder klassisch behandelt wurden, und durch die im zweiten Teil der Arbeit durchgeführten Experimente geklärt. Es ergab sich, daß für große mittlere Besetzungszahlen der Anfangszustände φ_α und φ_β mit den Phasenkonstanten der klassischen Felder identifiziert werden können.

Zum anderen zeigte es sich, daß bei parametrischen Resonanzeffekten eine Emission des a-Modus erfolgen kann, ohne eine negative Besetzungsdifferenz des Teilchensystems vorauszusetzen.

5 Literatur

- 1 R.J.Glauber, Phys.Rev. 131,2766 (1963)
- 2 Literatur siehe z.B.
Quantum Optics and Electronics,Les Houches,
edited by De Witt et al.,
Gordon and Breach Sciences Publishers,Inc.,New York 1965
Quantum Optics,
edited by Glauber,
Academic Press,New York and London 1969
Handbuch der Physik,Band XXV/2c,H.Haken,Kapitel V,S.73-97,
herausgegeben von Flügge,
Springer Verlag,Berlin-Heidelberg-New York 1970
- 3 I.A.Malkin,V.I.Manko, Sov.Phys.JETP 28,527 (1969)
- 4 A.Feldman,A.H.Kahn, Phys.Rev.B 1,4584 (1970)
- 5 S.Wilking, Z.Physik 157,384 (1959)
- 6 A.Messiah,Quantum Mechanics,
North Holland Publishing Company (1965)
- 7 K.E.Cahill,R.J.Glauber, Phys.Rev. 177,1857 (1969)
- 8 A.S.Tager,A.D.Gladun, ZETF 35,808 (1958)
- 9 Quantum Electronics,B.Lax,
edited by Townes,
Columbia University Press,New York 1960

6 Anhang

A1

Es gilt

$$|n\dot{\Phi}_{sN}\rangle = D(z_s)|snN\rangle = D|snN\rangle$$

mit

$$D = e^{-\sum_r I_{rr}^* c_r^+ c_r b^+ / \hbar \Omega + \sum_r I_{rr} c_r^+ c_r b / \hbar \Omega}$$

Wegen $DD^+ = 1$ folgt sofort die Vollständigkeit und Orthonormiertheit der $|n\dot{\Phi}_{sN}\rangle$.

Zum anderen erhält man

$$\begin{aligned} \langle n\dot{\Phi}_{sN} | H_0 | n' \dot{\Phi}_{s'N'} \rangle &= \langle snN | D^+(z_s) H_0 D(z_{s'}) | s'n'N' \rangle = \\ &\delta_{ss'}, \delta_{nn'}, \delta_{NN'} \left(\sum_r \epsilon_r m_r^s + n\hbar\omega \right) + \\ &\delta_{ss'}, \delta_{nn'} \left\{ \hbar\Omega \langle N | D^+(z_s) b^+ b D(z_{s'}) | N' \rangle + \right. \\ &\left. \sum_r I_{rr} m_r^s \langle N | D^+(z_s) b D(z_{s'}) | N' \rangle + \sum_r I_{rr}^* m_r^s \langle N | D^+(z_s) b^+ D(z_{s'}) | N' \rangle \right\} \end{aligned}$$

Es gilt¹

$$D^+(z_s) b D(z_s) = b + z_s$$

$$D^+(z_s) b^+ D(z_s) = b^+ + z_s^*$$

$$D^+(z_s) b^+ b D(z_s) = b^+ b + z_s b^+ + z_s^* b + |z_s|^2$$

Damit ergibt sich wegen $z_s = -\sum_r I_{rr}^* m_r^s / \hbar \Omega$

$$\begin{aligned} \langle n\dot{\Phi}_{sN} | H_0 | n' \dot{\Phi}_{s'N'} \rangle &= \\ &= \delta_{ss'}, \delta_{nn'}, \delta_{NN'} \left\{ \sum_r \epsilon_r m_r^s + n\hbar\omega + N\hbar\Omega - \left| \sum_r I_{rr} m_r^s \right|^2 / \hbar \Omega \right\} \end{aligned}$$

Also sind die Zustände $|n\dot{\Phi}_{sN}\rangle$ Eigenzustände zu H_0 mit den Eigenwerten

$$E_{nsN} = \sum_r \epsilon_r m_r^s + n\hbar\omega + N\hbar\Omega - \left| \sum_r I_{rr} m_r^s \right|^2 / \hbar \Omega$$

A2

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = -\mu_z B_z(t) \quad , \quad B_z(t) = B_0 + B_b \sin(\Omega t + \varphi_b)$$

$$H_1 = -\mu_x B_x(t) \quad , \quad B_x(t) = B_a \sin(\omega t + \varphi_a)$$

Mit der Transformation

$$|t_w\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \mu_z \int dt B_z(t)} |t\rangle$$

erhält man als Lösung der Bewegungsgleichung durch Dirac'sche Störungsrechnung erster Ordnung

$$(1) \quad |t_w\rangle = |0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_w(t') |0\rangle$$

mit

$$H_w(t') = e^{-\frac{i}{\hbar} \mu_z \int dt' B_z(t')} H_1(t') e^{\frac{i}{\hbar} \mu_z \int dt' B_z(t')}$$

Es gilt

$$(2) \quad \langle - | H_w(t') | + \rangle = -B_a \langle - | \mu_x | + \rangle e^{i\{\omega_0 t' - x \cos(\Omega t' + \varphi_b) + C\}} \cdot \sin(\omega t' + \varphi_a) \quad ,$$

wobei $\omega_0 = \gamma B_0$ und $x = \gamma B_b / \Omega$ sind.

Wegen

$$e^{-ix \cos(\Omega t' + \varphi_b)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in(\Omega t' + \varphi_b - \pi/2)} \quad ,$$

$J_n(x)$ Besselfunktion n-ter Ordnung, und

$$\sin(\omega t' + \varphi_a) = \frac{1}{2i} \left\{ e^{i(\omega t' + \varphi_a)} - e^{-i(\omega t' + \varphi_a)} \right\}$$

folgt mit (2)

$$\int_0^t dt' \langle - | H_w(t') | + \rangle = -\frac{B_a}{2i} \langle - | \mu_x | + \rangle \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in(\varphi_b - \pi/2)} e^{iC} \cdot$$

$$\times \left\{ e^{i\varphi_a} \frac{e^{\frac{i(\omega_0 + n\Omega + \omega)t}{1(\omega_0 + n\Omega + \omega)} - 1}} - e^{-i\varphi_a} \frac{e^{\frac{i(\omega_0 + n\Omega - \omega)t}{1(\omega_0 + n\Omega - \omega)} - 1}} \right\} ,$$

C ist eine Integrationskonstante.

Wenn $\Omega = 2\omega/k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, und $\omega_0 - \omega \approx 0$ ist, so erhält man aus (1) unter Vernachlässigung der nichtresonanten Terme für die Übergangswahrscheinlichkeit des Teilchens von $|+\rangle$ nach $|-\rangle$

$$W_{+-}(t) = g(t, \hbar\gamma B_0 - \hbar\omega) (\hbar\gamma B_a/4)^2 \left\{ J_0^2(x) + J_k^2(x) - 2J_0(x)J_k(x)\cos(2\varphi_a - k\varphi_b + 3k\pi/2) \right\}$$

mit

$$g(t, x) = \left| \frac{e^{ixt/\hbar} - 1}{x} \right|^2$$

Die vorliegende Arbeit wurde im III. Physikalischen Institut der Freien Universität Berlin durchgeführt. Ich danke Herrn Prof. Dr. S. Wilking für sein förderndes Interesse und für wertvolle Diskussionen.

Lebenslauf

Am 21. Januar 1942 wurde ich als Sohn des Buchhalters Willi Kutzner und seiner Ehefrau Anna, geb. Schubert, in Berlin geboren. Nach der Grundschulzeit vom 1.9.1948 bis 31.8.1956 in Berlin besuchte ich vom 1.9.1956 die Andreas-Oberschule in Berlin-Friedrichshain, wo ich im Sommer 1960 die Reifeprüfung ablegte. Am 30.6.1961 bestand ich die Anerkennungsprüfung zum Reifezeugnis des sowjetischen Sektors Berlins an der Albert-Einstein-Schule in Berlin-Neukölln.

Im Wintersemester 1961/62 begann ich an der Freien Universität Berlin das Physikstudium und bestand im Sommersemester 1964 die Diplom-Vorprüfung. Meine Diplomarbeit fertigte ich am III. Physikalischen Institut der Freien Universität Berlin bei Prof. Dr. S. Wilking an und legte am 13.7.1967 die Diplomprüfung ab. Seitdem bin ich als Wissenschaftlicher Assistent an der Freien Universität Berlin beschäftigt und als Doktorand im III. Physikalischen Institut tätig.

